Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

Н.В. Костюкович, Л.В. Ладутько

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

для слушателей заочного подготовительного отделения
и заочных подготовительных курсов

Минск 2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К727

Печатается по решению редакционно-издательского совета БГПУ, рекомендовано секцией физико-математических и технических наук (протокол № 18 от 03.07.08)

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики БГПУ *П.И. Кибалко*,

К727 Математика: метод. рек. и контрольные работы для слушателей заоч. подготовит. отд-ния и заоч. подготовит. курсов / Н.В. Костюкович, Л.В. Ладутько. – Минск.: БГПУ, 2008. – 49 с.

В пособии помещены методические рекомендации и контрольные работы в виде тестовых заданий по всем разделам школьного курса математики. Предлагаемые задания составлены в соответствии с программами по математике для средней школы и вступительных экзаменов в вузы Республики Беларусь.

Адресуется слушателям заочного подготовительного отделения и заочных подготовительных курсов. Может быть использовано учащимися средних школ, абитуриентами при подготовке к экзамену по математике.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Инструкция
по выполнению контрольных работ

Весь курс включает в себя 10 контрольных работ, составленных в форме тестов, каждый из которых состоит из двух частей: части **А** и части **В**. К каждому из 10 заданий части **А** даны пять ответов, из которых только один является верным. Часть **В** состоит из пяти заданий. Ответом к заданиям части **В** должно быть целое число. Если ответ получится в виде дроби, то его следует округлить до целого по правилам округления.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тонкой тетради. Сначала записывается условие задания, потом его решение и после обязателен ответ. Размещать выполненные задания нужно в строгом соответствии с их порядковыми номерами. Для замечаний рецензента после каждого задания оставьте свободное место.

Тетради с решениями контрольных работ присылаются в соответствии с установленным сроком сдачи.

Получив проверенную контрольную работу, нужно внимательно просмотреть все пометки преподавателя и исправить все ошибки. На повторную проверку тетради не отсылаются.

Тематика контрольных работ

1. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1. Преобразования числовых и алгебраических выражений.
2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2. Функции и их свойства.
3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3. Алгебраические уравнения, неравенства и их системы.
4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4. Текстовые задачи. Прогрессии.
5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5. Планиметрия.
6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6. Тригонометрия.
7. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7. Показательная и логарифмическая функции, уравнения и неравенства.
8. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8. Производная и ее применение.
9. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 9. Стереометрия.
10. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 10. Итоговая.

Предлагаемые контрольные работы составлены в соответствии с программой по математике для поступающих в вузы Республики Беларусь.

Какой бы путь решения задачи ни был выбран, какой бы метод ни применялся, успешность его использования зависит, в первую очередь, от знания теорем, формул и умения их применять. Поэтому перед выполнением каждой контрольной работы повторите соответствующие темы по школьным учебникам или по одному из пособий из списка литературы [1–20]. В конце данного учебного пособия предлагается некоторый теоретический материал, который также окажет вам помощь при выполнении контрольных работ.

Литература

1. Алгебра и начала анализа. Задачи и тесты / Сост. П.И. Кибалко и др.– Мн.: Экоперспектива, 2006.
2. Математика в экзаменационных вопросах и ответах: Справочник для учителей, репетиторов и абитуриентов / Л.И. Василюк , Л.А. Куваева. – Мн.: БелЭН, 2000.
3. Математика для старшеклассников: Методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / А.И. Азаров, С.А. Барвенов. – Мн.: Аверсэв, 2004.
4. Математика для старшеклассников: Методы решения задач с параметрами / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – Мн.: Аверсэв, 2003.
5. Математика для старшеклассников: Методы решения планиметрических задач: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Мн.: Аверсэв, 2005.
6. Математика для старшеклассников: Методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств, систем: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / А.И. Азаров, С.А. Барвенов. – Мн.: Аверсэв, 2005.
7. Математика для старшеклассников: Методы решения тригонометрических задач: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / А.И. Азаров и др. – Мн.: Аверсэв, 2005.
8. Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач: Пособие для учащихся общеобр. учреждений / В.П. Супрун. – Мн.: Аверсэв, 2003.
9. Математика для старшеклассников: Функциональные и графические методы решения экзаменационных задач: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / А.И. Азаров, С.А. Барвенов. – Мн.: Аверсэв, 2004.
10. Математика: задачи-«ловушки» на централизованном тестировании и экзамене / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Романчик. – Мн.: Аверсэв, 2005.
11. Математика. Подготовка к тестированию: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / Г.Г. Мамонтова. – Мн.: Новое знание, 2005.
12. Математика: Пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию за курс средней школы / А.И. Азаров и др. – Мн.: Аверсэв, 2003.
13. Математика. Типичные ошибки на централизованном тестировании и экзамене/ О.Н. Пирютко. – Мн.: Аверсэв, 2005.
14. Математика: учимся быстро решать тесты: Пособие для подготовки к тестированию и экзамену/ В.В. Веременюк, Е.А. Крушевский, И.Д. Беганская. – 4-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2006.

15. Текстовые задачи. Пособие для учащихся / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – Мн.: ТетраСистемс, 2002.
16. Функции, их свойства и графики. Теория, тесты, задачи: Для учителей и учащихся общеобр. учреждений / А.И. Азаров, В.И. Булатов. – Мн.: УниверсалПресс, 2004.
17. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Рольф, 2001.
18. Планиметрия. Итоговое повторение: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. средн. образования / М.И. Лисова, О.Н. Пирютко. – Мн.: Аверсэв, 2004.
19. Шлыков В.В. Геометрия. Планиметрия: Шк. учебн. пособие. – Мн.: ООО «Асар», 2003.
20. Шлыков В.В., Валаханович Т.В. Геометрия. Стереометрия: Шк. учебн. пособие. – Мн.: ООО «Асар», 2003.

Контрольная работа № 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы: [10], [11], [12].

Часть А

А1. Найти числовое значение разности многочленов A и B при $x = \frac{3}{2}$ и $y = -2$, если $A = -2x^3y - 1,5y^2x$; $B = -2x^3y + 1,5xy^2$.

1) 0; 2) 27; 3) – 18; 4) 18; 5) верный ответ не указан.

А2. Если 30% числа равны $2,25(\sqrt{125} - \sqrt{45}) : 0,5\sqrt{5}$, то это число равно…

1) 21; 2) 30; 3) 2,7; 4) 27; 5) верный ответ не указан.

А3. Среднее арифметическое чисел $\frac{16^{38}}{64^{19}}$ и $\frac{16^{37}}{64^{18}}$ равно…

1) $5 \cdot 2^{37}$; 2) $5 \cdot 2^{38}$; 3) $0,5 \cdot 4^{39}$; 4) 4^{19}; 5) верный ответ не указан.

А4. Если A – сумма всех простых чисел из отрезка [11; 21], а B – четное число из интервала (60; 70), кратное 3, то наибольший общий делитель чисел A и B равен…

1) 2; 2) 3; 3) 6; 4) 12; 5) верный ответ не указан.

А5. Если $\frac{32}{59}:0,(32) = x : 0,6(5)$, то x равно…

1) 0,0(1); 2) 0,(9); 3) 1,1; 4) $\frac{65}{59}$; 5) верный ответ не указан.

А6. Дробь $\frac{6y^2 + 5xy - x^2}{3y^2 + 2xy - x^2}$ после сокращения примет вид:

1) $\frac{x+6y}{x+3y}$; 2) $\frac{2y-x}{y-x}$; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{x-6y}{x-3y}$; 5) верный ответ не указан.

А7. Дробь $\frac{a^4 - a^2 - 12}{a^4 + 8a^2 + 15}$ можно сократить на…

1) $a^2 + 5$; 2) $a^2 - 3$; 3) $a + 3$; 4) $a^2 + 3$; 5) верный ответ не указан.

А8. Вычислить: $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} \cdot \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}$.

1) – 1; 2) 1; 3) – 2; 4) 2; 5) верный ответ не указан.

А9. Результат вычисления выражения $\left(1 + 2^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} \cdot \left(1 - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}\right)^{-0,5}$ равен…

1) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{16}}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) 3; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$; 5) верный ответ не указан.

A10. Упростить выражение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\le x\le 2$.

1) $2\sqrt{x-1}$; 2) $2x$; 3) 2; 4) 4; 5) верный ответ не указан.

Часть B

B1. Упростить: $\dfrac{b}{(1-2b)^2}-\dfrac{4b^2+2b}{2b-1}\left(\dfrac{b-1}{8b^3+1}:\dfrac{1-2b}{1-2b+4b^2}+\dfrac{1}{4b+2}\right)$.

B2. Вычислить: $64^{-\frac{5}{6}}-(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{-1{,}5}+\left(3^0\right)^4\cdot 4$.

B3. Найти все целые значения z, при которых дробь $\dfrac{z^2-z+3}{z+1}$ есть целое число. В ответе указать их сумму.

B4. Найти значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}+\dfrac{a^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-(ab)^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{2}{5}}}\right)\cdot\sqrt{b}$, если $b=2$, $a=\sqrt{32}$.

B5. Разность $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ является целым числом. Найти это число.

Контрольная работа № 2
ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы: [2], [9], [10], [16].

Часть А

A1. Функция задана формулой $y=(-3)^{-1}x+1$. Найти значение функции, если значение аргумента равно 3.

1) 2; 2) 10; 3) – 6; 4) 6; 5) верный ответ не указан.

A2. Указать область определения функции $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}+\sqrt[3]{x+1}$.

1) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-1;1)\cup(1;+\infty)$; 3) $(-1;+\infty)$;
4) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; 5) верный ответ не указан.

А3. Даны функции:

$f(x)=5\sqrt{x^2}$, $g(x)=5$, $\varphi(x)=2x+3$, $p(x)=\dfrac{11-6x}{5}$, $q(x)=\dfrac{x^2}{x}+4$.

Линейными функциями, проходящими через точку $A(1;\,5)$, являются:

1) $f(x),\ \varphi(x),\ q(x)$; 2) $\varphi(x),\ p(x)$; 3) $g(x),\ \varphi(x),\ p(x)$;
4) $g(x),\ \varphi(x),\ p(x),\ q(x)$; 5) верный ответ не указан.

А4. Указать область значений функции $y=\dfrac{2x}{x-1}$.

1) $(-\infty;\,1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$; 3) $(-\infty;+\infty)$;
4) $(-\infty;\,2)\cup(2;+\infty)$; 5) верный ответ не указан.

А5. Даны три функции: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x^3(x+2)}{x+2}$ и $\varphi(x)=|x-1|-|x+1|$.

Нечетными из них являются:

1) только $g(x)$; 2) только $\varphi(x)$; 3) $g(x)$ и $f(x)$; 4) $g(x)$ и $\varphi(x)$;
5) верный ответ не указан.

А6. При каком значении a функция $y=ax^2+4x-6$ принимает наибольшее значение в точке $x=2$?

1) 6; 2) – 6; 3) 2; 4) – 1; 5) верный ответ не указан.

А7. Указать формулу линейной функции, график которой параллелен прямой $y-2x=5$ и проходит через точку (0; 2):

1) $y=x+2$; 2) $y=2x$; 3) $y=-2x+2$; 4) $y=0{,}5x+2$;
5) верный ответ не указан.

А8. При построении графика дробно-линейной функции $y=\dfrac{4x-3}{x-1}$ сдвиг вдоль оси OY графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ осуществляется:

1) вверх на 3 единицы; 2) вверх на 4 единицы; 3) вниз на 1 единицу;
4) вниз на 3 единицы; 5) верный ответ не указан.

А9. Даны три функции: $f(x)=x-1$, $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ и $\varphi(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$.

Можно утверждать:

1) графики всех функций совпадают;
2) графики всех функций различны;
3) графики функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают;
4) графики функций $g(x)$ и $f(x)$ совпадают;
5) верный ответ не указан.

А10. Найти все значения a, при которых графики функций $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$ и $y=|x+a|$ имеют одну общую точку.

1) $a\in[0;\ 2)$; 2) $a\in[2;\ 4)$; 3) $a\in[-3;\ -2]$; 4) $a\in[1;\ 3)$;
5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Дана функция $g(x) = x^3 + 2ax - 5$. Найти разность $g(-2) - g(-1)$, если $g(-3) = -2$.

В2. Графики функций $y = ax - 6$ и $y = (a - 22)x - 4a$ пересекаются в точке с абсциссой равной -1. Найти ординату точки их пересечения.

В3. Известно, что функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ принимает наибольшее значение в точке (1; 1), а ее график проходит через начало координат. Найти значение b.

В4. Определить количество точек пересечения графиков функций $y=x^2-4x+\sqrt{4x^2-32x+64}$ и $y=|x|-|x+1|$.

В5. Найти сумму $a + b + c + d$, если функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ обратная по отношению к функции $y=\dfrac{2x}{1-x}$.

Контрольная работа № 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы: [3], [4], [8], [9], [10].

Часть А

А1. Сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $x^2-8x-\dfrac{9x}{|x|}=0$ принадлежит промежутку:

1) (8,1; 9,1); 2) [0; 8]; 3) (15,9; 18,9); 4) [– 16; 0);
5) верный ответ не указан.

А2. Если x_0 – корень уравнения $\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}-2=0$, то выражение $\dfrac{1}{x_0}\cdot\left(32-\dfrac{x_0}{16}\right)$ равно…

1) $\dfrac{1}{16}$; 2) $\dfrac{1}{32}$; 3) 16; 4) 32; 5) верный ответ не указан.

A3. Найти произведение $kx_о$, где k – число целых корней неравенства $\dfrac{\left(6+x-x^2\right)^{\frac{1}{4}}}{2x+5} \geq \dfrac{\left(6+x-x^2\right)^{\frac{1}{4}}}{x+4}$, а $x_о$ – его наибольший корень.

1) 6; 2) – 3; 3) – 2; 4) 9; 5) верный ответ не указан.

A4. Найти середину интервала, который образуют решения системы неравенств $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{12-6\sqrt{3}}<\sqrt{3},\\ 5<\left|x^2-4x\right|.\end{cases}$

1) – 3; 2) – 1; 3) 0,5; 4) 1; 5) верный ответ не указан.

A5. Найти количество натуральных значений x, при которых точки графика функции $y=\dfrac{8}{x^2-6x+9}-1$ лежат выше точек графика функции $y=\dfrac{2}{x-3}$.

1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) верный ответ не указан.

A6. Выяснить какому промежутку принадлежат корни уравнения $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$, если они существуют.

1) [– 1; 1]; 2) (1; 3); 3) [3; 17]; 4) корней нет;
5) верный ответ не указан.

A7. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2=0$ равна $\dfrac{2}{9}$?

1) $m=21$, $m=3$; 2) $m=\dfrac{1}{3}$, $m=\dfrac{7}{3}$; 3) $m=\dfrac{1}{3}$; 4) $m=3$;

5) верный ответ не указан.

A8. Найти количество различных корней уравнения $\left(f(x)\right)^2-2=2-\sqrt{g(x)}$, где $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $g(x)=(x-1)^8$.

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8; 5) верный ответ не указан.

A9. Сколько различных корней имеет уравнение $\left|2|x|-8\right|=-3x-3$?

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 4; 5) верный ответ не указан.

A10. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{y}$, если $x^2-xy-2y^2\leq 0$.

1) – 1; 2) 1; 3) 8; 4) – 2; 5) верный ответ не указан.

Часть B

B1. Решить уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^4-x-20=0$. В ответ записать сумму корней или корень (если он единственный) уравнения.

В2. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=4, \\ |x-y|=2? \end{cases}$

В3. Найти сумму корней или корень (если он единственный) уравнения $\dfrac{15x}{x^2+2x+2}-\dfrac{8x}{x^2+x+2}=1$.

В4. Решить неравенство $2x^2-2\sqrt{2x^3}<8x$. В ответ записать произведение наименьшего и наибольшего целых его решений.

В5. Решить уравнение $(x^2+2x+9)(y^2-10y+30)=40$. В ответ записать сумму всех значений x и y.

Контрольная работа № 4
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ. ПРОГРЕССИИ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы [11], [14], [15], [17].

Часть А

А1. Первый турист, проехав 1,5 *ч* на велосипеде со скоростью 16 *км/ч*, делает остановку на 1,5 *ч*, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 *км/ч*. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

1) 60 *км*; 2) 56 *км*; 3) 64 *км*; 4) 48 *км*; 5) верный ответ не указан.

А2. В свежих яблоках 85 % воды, а в сушеных 40 % воды. На сколько процентов уменьшилась масса яблок при сушке?

1) 75 %; 2) 25 %; 3) 45 %; 4) 70 %; 5) верный ответ не указан.

А3. Двое рабочих за смену изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15 %, а второй на 25 %, они стали изготавливать за смену 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

1) 38 и 48 деталей; 2) 42 и 44 детали; 3) 40 и 46 деталей;
4) 36 и 50 деталей; 5) верный ответ не указан.

А4. Площади трех участков земли находятся в отношении $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{3}{8}$. Известно, что с первого участка собрано зерна на 72 *ц* больше, чем со второго. Указать общую площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 *ц* с гектара.

1) 28 *га*; 2) 26 *га*; 3) 20 *га*; 4) 30 *га*; 5) верный ответ не указан.

А5. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 *т* стали с содержанием 30 % никеля?

1) 40 *т*, 100 *т*; 2) 20 *т*, 120 *т*; 3) 80 *т*, 60 *т*; 4) 35 *т*, 105 *т*;

5) верный ответ не указан.

А6. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата увеличилась на 12 %?

1) 2,8 %; 2) 24 %; 3) 28 %; 4) 12 %; 5) верный ответ не указан

А7. Найти сумму всех положительных нечетных двузначных чисел, кратных 3.

1) 840; 2) 900; 3) 860; 4) 855; 5) верный ответ не указан.

А8. Найти сумму четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

1) – 15; 2) 45; 3) 15; 4) – 27; 5) верный ответ не указан.

А9. Вычислить сумму: $60^2 - 59^2 + 58^2 - 57^2 + \ldots - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

1) 1800; 2) 1860; 3) 1830; 4) 1840; 5) верный ответ не указан.

А10. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Периметр треугольника равен 24 *см*. Найти площадь треугольника.

1) 28; 2) 30; 3) 24; 4) 32; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет $\frac{2}{3}$, а второй $\frac{3}{4}$ первого члена. Найти четвертый член пропорции.

В2. Поезд движется со скоростью 40 *км/ч*. Пассажир заметил, что встречный поезд прошел мимо его окна за 3 *с*. Найти скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 *м*.

В3. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 *с* меньше другого. Если они начнут пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 *с*. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

В4. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от 0, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

В5. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

Контрольная работа № 5
ПЛАНИМЕТРИЯ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по геометрии, а также использовать пособия из списка литературы: [2], [5], [11], [18], [19].

Часть А

А1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $\angle ABO = 60°$ и известны координаты его вершин : $A(-5; -2{,}2)$, $B(-5; 5{,}8)$. Найти диагональ AC.

1) 48; 2) 8; 3) 16; 4) 24; 5) верный ответ не указан.

А2. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$. Если x_1 и y_1 – координаты ее центра, а R – радиус, то их сумма $x_1 + y_1 + R$ равна…

1) 8; 2) 7; 3) 6; 4) 5; 5) верный ответ не указан.

А3. Высоты параллелограмма равны $6\sqrt{3}$ см и 8 см, а угол между ними равен 60°. Найти площадь параллелограмма.

1) 144 см^2; 2) 72 см^2; 3) 96 см^2; 4) 48 см^2; 5) верный ответ не указан.

А4. Точки A, B и C лежат на окружности, причем хорды AB и AC равны 6см, а угол BAC опирается на дугу в 120°. Найти длину хорды BC.

1) 3 см; 2) 6 см; 3) $6\sqrt{2}$ см; 4) 12 см; 5) верный ответ не указан.

А5. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

1) $\frac{1}{4}$ см; 2) $20\frac{5}{8}$ см; 3) $5\frac{5}{8}$ см; 4) $10\frac{5}{8}$ см; 5) верный ответ не указан.

А6. Найти площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

1) 80; 2) 40; 3) 60; 4) 50; 5) верный ответ не указан.

А7. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Произведение длин оснований этой трапеции равно…

1) 15; 2) 30; 3) 75; 4) 60; 5) верный ответ не указан.

А8. Биссектриса прямого угла C треугольника ABC делит гипотенузу AB на части 15 см и 20 см. Найти периметр треугольника ABC.

1) 63 см; 2) 66 см; 3) 74 см; 4) 84 см; 5) верный ответ не указан.

А9. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, длина медианы BM равна $10\sqrt{3}$ см. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найти длину катета BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

1) 18 см; 2) 22 см; 3) 28 см; 4) 30 см; 5) верный ответ не указан.

А10. Диагонали квадрата $ABCD$ со стороной 1 дм пересекаются в точке O. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A, середину стороны BC и точку O.

1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ дм; 2) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ дм; 3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ дм; 4) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ дм; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Длины двух окружностей относятся как 1 : 3. Найти площадь большего круга, если радиус меньшего равен $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ см.

В2. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR, $\angle QTR = \angle PQR$, $PT = 8$, $TR = 1$. Найти сторону QR.

В3. В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $BC = 7$ см и длина медианы BM равна 4 см. Найти S^2, где S – площадь треугольника ABC.

В4. Две окружности касаются внешне. Их общая внешняя касательная образует с общей внутренней касательной угол 60°. Найти расстояние между центрами данных окружностей, если радиус большей равен 3.

В5. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на части 30 и 20, считая от большего основания. Найти площадь этой трапеции, если меньшее основание равно 6.

Контрольная работа № 6
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы: [7], [14], [16], [17].

Часть А

А1. Вычислить без использования калькулятора и таблиц:

$$\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}.$$

1) $\frac{5+6\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$; 5) верный ответ не указан.

А2. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, найти $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

1) $1+\left(\frac{a^2-1}{4}\right)^2$; 2) $1-2\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2$; 3) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) $\left(\frac{a^2-1}{4}\right)^2$;

5) верный ответ не указан.

А3. Найти значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

1) $1\dfrac{2}{7}$; 2) $2\dfrac{3}{4}$; 3) 1; 4) 1,5; 5) верный ответ не указан.

А4. Найти область определения функции $y = \dfrac{5}{\operatorname{ctg} x} + 6$.

1) $x \neq \dfrac{\pi}{2}n, \quad n \in Z$; 2) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$; 3) $x \neq \pi n, \quad n \in Z$;

4) $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$; 5) верный ответ не указан.

А5. Найти область значений функции: $y = \cos^4 \dfrac{x}{5} - \sin^4 \dfrac{x}{5}$.

1) [–1; 0]; 2) [–1; 1]; 3) [0; 1]; 4) [–1; 2]; 5) верный ответ не указан.

А6. Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x \cos x$.

1) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$; 2) $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$; 3) $\varnothing$;

4) $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$; 5) верный ответ не указан.

А7. Найти значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg} 37°30' + \operatorname{ctg} 37°30'}{3\sin 165°}$.

1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{8}{3}$; 3) 8; 4) $\dfrac{4}{3}$; 5) верный ответ не указан.

А8. При каких значениях a уравнение $\sin\dfrac{x}{2} = a^2 - 3$ имеет решение?

1) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$; 2) $\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$; 3) [–2; 2];

4) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 5) верный ответ не указан.

А9. Значение выражения $\dfrac{1}{\sin 170°} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 100°}$ равно:

1) 1; 2) –1; 3) 4; 4) 3; 5) верный ответ не указан.

А10. Вычислить: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

1) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$; 2) $\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$;

4) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Найти наибольшее отрицательное значение x в градусах из области определения функции $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos x}$.

В2. Вычислить $2(\cos^2 5° - 0{,}5\cos 10°)$.

В3. Упростить до числового ответа выражение:

$$\frac{1 - \sin^2 2\alpha}{(1 - \sin 2\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}.$$

В4. Найти число корней уравнения $\sin^2 x - 2\cos x + 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[-3\pi; 3\pi]$.

В5. Чему равно значение выражения $\dfrac{\arcsin(\sin 10) + 10}{\pi}$?

Контрольная работа № 7
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре, а также использовать пособия из списка литературы: [6], [12], [16], [17].

Часть А

А1. Среди указанных функций указать возрастающую на всей области определения:

1) $y = 2^{|x|} + 1$; 2) $y = 2^{\frac{|x|}{x}} - 2$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 3$;

4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$; 5) нет такой функции.

А2. Указать количество целых значений из области определения функции:

$$y = \log_{x^2}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}\right).$$

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 2; 5) верный ответ не указан.

А3. Сколько действительных корней имеет уравнение: $2^{|x|} = x + 2$?

1) 1; 2) 2; 3) не имеет корней; 4) 3; 5) верный ответ не указан.

А4. Если k – число корней уравнения $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$, а x_0 – его положительный корень, то $\dfrac{2k - x_0}{5}$ равно…

1) 5; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) верный ответ не указан.

А5. Если x_0 – корень уравнения $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + 2^{3(x-1)} = 120$, то среднее геометрическое x_0 и 18 равно:

1) 10; 2) 6; 3) $3\sqrt{6}$; 4) $6\sqrt{2}$; 5) верный ответ не указан.

А6. Вычислить $\left(16^{\log_{32} 3\log_{81} 5}\right)^5$.

1) $\sqrt[3]{5^5}$; 2) $\sqrt[5]{5}$; 3) 5; 4) $5\sqrt{5}$; 5) верный ответ не указан.

А7. Найти сумму целых решений неравенства:

$$\frac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x} < 0.$$

1) 6; 2) 10; 3) 8; 4) 3; 5) верный ответ не указан.

А8. Если $x \in [6;12]$, то множеством значений функции $y = \log_2 3 - \log_8 x^3$ является промежуток:

1) [–2; 0]; 2) (–2; 0); 3) [–2; –1]; 4) (0; 2); 5) верный ответ не указан.

А9. Корень уравнения $\log_\pi \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$ принадлежит промежутку:

1) [254; 260]; 2) [248; 254]; 3) [0; 200]; 4) [100; 220];
5) верный ответ не указан.

А10. Произведение корней уравнения $10000 = x^{\lg x}$ равно:

1) $\frac{1}{10}$; 2) 100; 3) 1; 4) 10; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. **Р**ешить неравенство: $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$. В ответ указать сумму целых решений (или целое решение, если оно единственное).

В2. Указать наименьшее целое решение неравенства:

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

В3. Найти сумму корней уравнения: $x^3 \cdot 2^{3x-3} - x^3 = 27 \cdot 8^{x-1} - 27$.

В4. Найти значение выражения $\frac{x_1 x_2 + 4}{x_1 + x_2}$, если x_1 и x_2 – корни уравнения:

$$1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}.$$

В5. Найти сумму произведений xy всех пар решений системы $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5, \\ x^{y^2+2} = 125. \end{cases}$

Контрольная работа № 8
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре и началам анализа, а также использовать пособия из списка литературы: [9], [11], [12].

Часть А

А1. Продифференцировать функцию $y = \sin\frac{x}{\pi} + \cos\frac{\pi}{5}$.

1) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi} - \frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{x}{\pi} - \sin\frac{\pi}{5}$; 3) $-\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi} + \sin\frac{\pi}{5}$;
4) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}$; 5) верный ответ не указан.

А2. Материальная точка движется по закону $S(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Найти скорость в момент времени $t = 2$?

1) 7; 2) 14; 3) 22; 4) 21; 5) верный ответ не указан.

А3. Точками минимума функции $y = \sin x - 0{,}5\sin 2x$ являются точки:

1) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 2) $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 3) $x = 2\pi n,\ n \in Z$;
4) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 5) верный ответ не указан.

А4. Найти критические точки функции $y = \sqrt[5]{\left(x^3 - 27\right)^2} + \frac{2}{5}$.

1) $x = 3$; 2) $x = 0$ и $x = 3$; 3) $x = 0$;
4) критических точек нет; 5) верный ответ не указан.

А5. Найти сумму пяти членов геометрической прогрессии, у которой знаменатель и третий член соответственно равны наименьшему и наибольшему значениям функции $y = x^2 + \frac{2}{x}$ на отрезке [0,5; 2].

1) 5; 2) $\frac{5}{9}$; 3) 605; 4) $\frac{605}{9}$; 5) верный ответ не указан.

А6. Найти абсциссу точки на кривой $y = x - \ln x$, если ее касательная, проведенная в этой точке, наклонена к оси OX под углом 135°.

1) 0,5; 2) 1; 3) – 1; 4) $2 + \sqrt{2}$; 5) верный ответ не указан.

А7. Найти больший корень уравнения $f'(x) = 4g(x)$, если $f(x) = e^{2(1-x)}(2x-1)$, $g(x) = (x^2 - 1)e^{2(1-x)}$.

1) $1+\sqrt{3}$; 2) 2; 3) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; 4) 1; 5) верный ответ не указан.

А8. Решить неравенство $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \ln x - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \sqrt{2}$.

1) $x \in (0;1)$; 2) $x \in (-1;1)$; 3) $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$; 4) $x \in (1;+\infty)$;
5) верный ответ не указан.

А9. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x = 1$.

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) верный ответ не указан.

А10. Найти число положительных корней уравнения $x^3 - 10x^2 + 1 = 0$.

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Записать количество точек экстремума функции $y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$.

В2. Дано $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

В3. Найти сумму квадратов значений аргумента, при которых значения функции $y(x) = x^3 - 2x^2$ равны значениям ее производной.

В4. При каком наибольшем значении параметра a функция $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - 2ax$ возрастает на всей числовой прямой?

В5. Найти наименьшее значение функции $f(x) = -5x^3 + x|x-1|$ на отрезке [0; 2].

Контрольная работа № 9
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре и началам анализа, а также использовать пособия из списка литературы: [11], [14], [20].

Часть А

А1. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь осевого сечения его равна 24.

1) 32π; 2) 24π; 3) 30; 4) 64π; 5) верный ответ не указан.

А2. Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани – квадраты.

1) $\dfrac{3d^3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{2d^3\sqrt{3}}{50}$; 3) $\dfrac{3d^3\sqrt{15}}{5}$; 4) $\dfrac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$; 5) верный ответ не указан.

А3. Найти площадь сечения тетраэдра *ABCD* плоскостью, проходящей через вершину *A* и середины ребер *BD* и *CD*, если каждое ребро тетраэдра равно *a*.

1) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$; 2) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$; 3) $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{16}$; 4) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$; 5) верный ответ не указан.

А4. Найти объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и составляет угол 45º с плоскостью основания.

1) $125\pi\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{3}$; 3) $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{24}$; 4) $\dfrac{125\pi}{3}$; 5) верный ответ не указан.

А5. Два прямоугольных треугольника лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют общую гипотенузу. Найти расстояние между вершинами прямых углов этих треугольников, если длины катетов этих треугольников равны 4 и 3 *см*.

1) $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$; 2) $12\sqrt{\dfrac{2}{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$ или $\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$; 4) 12;

5) верный ответ не указан.

А6. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен 9, а ограничивающая его дуга равна 120º. Найти высоту конуса.

1) $6\sqrt{2}$; 2) 6; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5) верный ответ не указан.

А7. Треугольник со сторонами 10 *см*, 17 *см* и 21 *см* вращается вокруг большей стороны. Вычислить объем и поверхность полученной фигуры вращения.

1) 108π *см*^{3}; 112π *см*^{2}; 2) 448π *см*^{3}; 216π *см*^{2}; 3) 424π *см*^{3}; 216π *см*^{2};
4) 420π *см*^{3}; 200π *см*^{2}; 5) верный ответ не указан.

А8. Найти площадь диагонального сечения правильной четырехугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой 2 и 8, а боковое ребро 5.

1) $5\sqrt{14}$; 2) $5\sqrt{7}$; 3) $10\sqrt{14}$; 4) $10\sqrt{7}$; 5) верный ответ не указан.

А9. Найти объем куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно *a*.

1) $3a^3\sqrt{3}$; 2) $27a^3$; 3) $9a^3\sqrt{3}$; 4) $3a^3$; 5) верный ответ не указан.

А10. В шаре, радиус которого 10 *см*, проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения, отстающие от центра на 6 *см* и 8 *см*. Найти объем полученного шарового пояса.

1) $\dfrac{308\pi}{3}$*см*^{3}; 2) $\dfrac{274\pi}{3}$*см*^{3}; 3) $\dfrac{302\pi}{3}$*см*^{3}; 4) $\dfrac{304\pi}{3}$*см*^{3};

5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Найти объем правильной треугольной призмы, полная поверхность которой равна $8\sqrt{3}$, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$.

В2. Найти объем треугольной пирамиды, если две ее взаимно перпендикулярные грани являются равносторонними треугольниками со сторонами 4.

В3. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, периметры которых равны 36 *см* и 50 *см*, а разность их площадей равна 70 *см*^{2}. Определить площадь осевого сечения цилиндра.

В4. Определить радиус вписанного в конус шара, если его высота 8, а образующая 10.

В5. На поверхности шара даны три точки. Расстояния между этими точками 6 *см*, 8 *см*, 10 *см*. Найти расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки, если радиус шара равен 13 *см*.

Контрольная работа № 10
ИТОГОВАЯ

Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующие разделы школьных учебных пособий по алгебре и началам анализа, геометрии, а также использовать пособия из списка литературы: [11], [13], [14], [17].

Часть А

А1. Упростить выражение: $\dfrac{\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-8x\right)}$.

1) $\dfrac{1}{8}\operatorname{tg} 8x$;   2) $\operatorname{tg} 8x$;   3) $\dfrac{1}{8}$;   4) 8   5) верный ответ не указан.

А2. Имеется два сплава никеля и железа, в первом из которых соотношение количества этих металлов 1:19, а во втором 2:3. От каждого сплава взяли определенное количество металла и получили сплав весом 140 *кг*, в котором 30 % никеля. Сколько килограммов первого сплава было взято?

1) 60;   2) 80;   3) 100;   4) 40;   5) верный ответ не указан.

А3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

1) $\dfrac{4ab}{a+b}$;   2) $\dfrac{2ab}{a+b}$;   3) $\dfrac{4b^2}{a}$;   4) $\dfrac{4a^2}{b}$;   5) верный ответ не указан.

А4. Найти площадь фигуры, заданной неравенством $|y-1|+|x-1|\le 8$.

1) 64;   2) 128;   3) 32;   4) 256;   5) верный ответ не указан.

А5. Найти сумму корней (или корень) уравнения: $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$.

1) 4; 2) 3; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) 9; 5) верный ответ не указан.

А6. Найти сумму: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$.

1) 1; 2) $\frac{99}{100}$; 3) 1,5; 4) 2; 5) верный ответ не указан.

А7. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V. Найти объем призмы.

1) $3V$; 2) $2V$; 3) $4V$; 4) $6V$; 5) верный ответ не указан.

А8. Упростить $\sqrt{\frac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1}$, если $x\in(0;1)$.

1) $\sqrt{x}$; 2) 1; 3) $\sqrt{x}-1$; 4) $1-\sqrt{x}$; 5) верный ответ не указан.

А9. Найти наименьшее целое решение неравенства:

$$\log_2\left(\frac{x^2}{4}+x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\log_{0,5}(x+3)>\log_4(x+1)-1.$$

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 1; 5) верный ответ не указан.

А10. Найти сумму произведений (или произведение xy) решений системы:

$$\begin{cases}3x^2+xy-2y^2=0,\\ 2x^2-3xy+y^2=-1.\end{cases}$$

1) $-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 0; 4) 12; 5) верный ответ не указан.

Часть В

В1. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 *см*, а высота равна 9 *см*. Каждое боковое ребро равно 13 *см*. Вычислить объем пирамиды.

В2. Указать сумму корней (или корень) уравнения:

$$\log_x 256=4\left(2-\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}+...\right).$$

В3. Дана функция $f(x)=\frac{x}{3a+2}+\cos 3x$. Найти наибольшее целое отрицательное значение параметра a, при котором уравнение $f'(x)=0$ имеет решение.

B4. Найти разность большего и меньшего из корней уравнения:

$$\sqrt[3]{7-x}+\sqrt{6+2x}=4.$$

B5. Найти сумму корней уравнения $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}-\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}=0.$

КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Если натуральное число имеет только два делителя (само число и единицу), то оно называется *простым*; если же натуральное число имеет более двух делителей, то оно называется *составным*.

Заметим, что число 1 не относят ни к простым, ни к составным.

Наибольшим общим делителем (*НОД*) нескольких натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делятся все данные числа.

Для того, чтобы найти НОД(a; b) необходимо:

1. Разложить числа a и b на простые множители;
2. Выписать общие простые множители в наименьших степенях;
3. Найти произведение выписанных множителей.

Наименьшим общим кратным (*НОК*) нескольких натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на все данные числа.

Для того, что бы найти НОК($a;b$) необходимо:

1. Разложить числа a и b на простые множители;
2. Выписать все простые множители, которые встречаются хотя бы в одном разложении, в наибольших степенях;
3. Найти произведение выписанных множителей.

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab.$$

Если одно число является делителем другого, то НОД есть меньшее из этих чисел, а НОК – большее.

Рациональные числа и действия над ними

Рациональным числом (*обыкновенной дробью*) называется число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. Число m называется *числителем*, n – *знаменателем* дроби.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если $|m| < n$, и – *неправильной*, если $|m| \geq n$.

Любая обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержит других простых множителей, кроме 2 или 5, может быть представлена в виде конечной десятичной дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную: чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пропорции

Пропорцией называется верное равенство вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, где a, b, c, d не равны нулю. Пропорцию можно записать иначе: $a : b = c : d$.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов: $ad = bc$.

Проценты

Процентом от числа называется одна сотая часть числа.

1. Пусть имеется некоторое число a, тогда p% от числа a будут равны $a{\cdot}p\cdot 0{,}01$.
2. Пусть число b составляет p% от некоторого числа x. Для нахождения числа x составим пропорцию $\frac{b}{p}=\frac{x}{100}$, откуда $x=\frac{b\cdot 100}{p}$.
3. Пусть некоторая переменная величина a, зависящая от времени t, в начальный момент t_0 имела значение a_0, а в момент t_1 – значение a_1. Тогда абсолютный прирост величины a за время $t_1 - t_0$ будет равен a_1 - a_0. Относительный прирост $\frac{a_1-a_0}{a_0}$. Процентный прирост $p_1=\frac{a_1-a_0}{a_0}\cdot 100$. Отсюда
$$a_1 = a_0 + a_0\ \frac{p_1}{100}=a_0(1+\frac{p_1}{100}).$$
При $t = t_2$ $a_2 = a(1 + \frac{p_2}{100})=a_0(1+\frac{p_1}{100})(1+\frac{p_2}{100})$. Если в последующие моменты времени $t_3, t_4, \dots, t_n$ процентный прирост составляет соответственно $p_3, p_4, \dots, p_n$%, то в момент времени $t = t_n$ значение
$$a_n = a_0(1+\frac{p_1}{100})(1+\frac{p_2}{100})...(1+\frac{p_n}{100}).$$
При условии $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ имеем $a_\text{n} = a_0(1 + \frac{p}{100})^n$.

Задачи на составление уравнений

Задачи на движение

1. Пройденный путь при равномерном движении по прямой определяется по формуле: $S = vt$, где v – скорость, t – время.
2. Если объект, имеющий в стоячей воде скорость v_0, движется по реке, скорость течения которой равна v, то скорость объекта по течению реки равна $v_0 + v$, а против течения реки $v_0 - v$.
3. Если объекты начинают движение одновременно навстречу друг другу, то время, через которое они встретятся, вычисляется по формуле $t = \frac{S}{v_1+v_2}$, где S – расстояние между ними, v_1 и v_2 – скорости.

4. Если один объект догоняет другой, то время определяется равенством $t = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$.
5. При движении объектов по окружности радиуса R из одной точки, но в противоположных направлениях время новой встречи можно найти по формуле $t = \dfrac{2\pi R}{v_1 + v_2}$. При движении в одном направлении новая встреча произойдет через $t = \dfrac{2\pi R}{v_1 - v_2}$ часов.
6. При равноускоренном либо равнозамедленном движении используют следующие формулы: $S = v_0 t + a\dfrac{t^2}{2}$; $a = \dfrac{v - v_0}{t}$.

Задачи на совместную работу

Объем выполняемой работы принимается за единицу**.** Если t – время, требуемое для выполнения всей работы, а p – производительность труда, то $p = \dfrac{1}{t}$.

Стандартная схема решения задач на совместную работу:

Пусть один рабочий выполняет работу за a часов, второй за b часов. Тогда за один час они выполняют соответственно $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{b}$ часть работы. Вместе за один час они выполняют $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ часть работы. Следовательно, на совместное выполнение работы им потребуется $1/\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{ab}{a+b}$ часов.

Задачи на концентрацию

Пусть смесь массы M содержит некоторое вещество массы m. Тогда концентрацией данного вещества в смеси назовем величину $c = \dfrac{m}{M}$, а процентным содержанием данного вещества – величину $c \cdot 100$.

Концентрация вещества и общей массы смеси данного вещества определяется по формуле $m = c \cdot M$.

Если две смеси с массами m_1 и m_2 и с концентрациями в них c_1 и c_2 некоторого вещества сливают, то масса этого вещества в новой смеси определяется выражением $c_1 m_1 + c_2 m_2$. Концентрация данного вещества равна $c = \dfrac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$.

Арифметическая прогрессия

Определение. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого постоянного для этой последовательности числа d, называется *арифметической прогрессией*, а число d – *ее разностью*.

Арифметическая прогрессия определяется условием:

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ при } n \geq 1.$$

Формула общего члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Свойства арифметической прогрессии:

1) Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.

2) Для любой арифметической прогрессии, если $p + m = k + l$, то $a_p + a_m = a_k + a_l$ ($p, m, k, l \in N$).

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}; \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

Определение. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число q, называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Таким образом, геометрическая прогрессия определяется условиями: $b_1 = b$, $b \neq 0$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($q \neq 0$).

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Свойства геометрической прогрессии:

1) Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль любого ее члена, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего членов, т.е.

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

2) Для любой геометрической прогрессии, если $m + p = k + l$, то $b_m \cdot b_p = b_k \cdot b_l$.

Формулы суммы n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}; \qquad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \qquad (q \neq 1).$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$: $\quad S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Формулы сокращенного умножения

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Степень с натуральным и целым показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, $n > 1$, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a (обозначается a^n). Число a называется *основанием степени, n – показателем*.

Свойства степени с показателем $n \in N$, $m \in N$:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n > m$;
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
4. $(ab)^n = a^n b^n$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Считается, что $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

Для $a \neq 0$ и $k \in N$ $\qquad a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$.

Модуль действительного числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется такое неотрицательное число, что $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Модуль действительного числа представляет собой расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчета.

Основные свойства модуля:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;
5. $|a|^2 = a^2$;
6. $|a| \geq a$;
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
8. $|a - b| \leq |a| + |b|$;
9. $|a - b| \geq |a| - |b|$;
10. $|a| = \sqrt{a^2}$.

Корень *n*-й степени

Корнем n-й степени ($n \in N$, $n \neq 1$) из действительного числа a называют такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in N$, $n \neq 1$) из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n-я степень которого равна a. Обозначение: $\sqrt[n]{a}$.

Свойства арифметического корня ($a \geq 0$; $b \geq 0$; $n \in N$, $n \neq 1$):

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $k \in N$, $k \neq 1$;
4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;
5. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in N$;
6. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $a \in R$.

В элементарной математике условились запись $\sqrt[n]{a}$ использовать для обозначения арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа, а также для обозначения корня нечетной степени из отрицательного числа.

Степень с рациональным показателем

Степенью с рациональным показателем x называется число

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ \text{где } a > 0,\ m \in Z,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

Если $a = 0$ и $x > 0$, то $a^x = 0$.

Свойства 1 – 5 степени с натуральным показателем выполняются и для степени с целым и рациональным показателем.

Функции

Под *функцией* с областью определения X понимается соответствие, при котором каждому числу x из множества X соответствует единственное число y. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом,* y *– зависимой переменной* или *значением функции*.

Множество X называют *областью определения функции* f и обозначают $D(f)$.

Множество значений, которые принимает переменная y, называется *областью значений функции* f и обозначается $E(f)$.

Функция f называется *возрастающей* [*убывающей*] *на некотором промежутке* I, если для $\forall x_1, x_2 \in I$, таких, что $x_1 > x_2$, выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$ [$f(x_1) < f(x_2)$].

Функция f называется *возрастающей* [*убывающей*], если она возрастает [убывает] на всей области определения.

Функция, которая принимает каждое свое значение в единственной точке области определения, называется обратимой.

Функцию g, которая в каждой точке области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что $f(y) = x$, называют обратной к функции f.

Теорема об обратной функции.

Если f – возрастающая (убывающая) на промежутке I функция, то существует обратная к f функция φ, которая определена на $E(f)$ и возрастает (убывает) на $E(f)$.

Функции f и g являются взаимно-обратными. Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Функция f называется *четной* [*нечетной*], если выполняются условия: 1) $\forall x \in D(f)$ значение $-x \in D(f)$; 2) $\forall x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$.

Функция f называется *периодической*, если $\exists T > 0$ такое, что выполняются условия: 1) если $x \in D(f)$, то и $(x \pm T) \in \mathrm{D}(f)$; 2) $\forall x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x)$. Число T называется *периодом функции f*. Наименьший положительный период называется *основным.*

Окрестностью точки называется любой интервал с центром в этой точке.

Точка x_0, принадлежащая области определения функции $f(x)$, называется *точкой максимума* [*минимума*] *функции f*, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $[f(x) \ge f(x_0)]$.

Значение функции в точке максимума [минимума] называется *максимумом* [*минимумом*] *функции.*

Нулем функции называется значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

Промежутки, на которых функция сохраняет знак, называются *промежутками знакопостоянства функции.*

Графиком функции f называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$.

Графики четных функций симметричны относительно оси $OУ$; графики нечетных функций симметричны относительно начала координат; графики обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

<u>*Преобразования графиков*</u>

Пусть дан график $Г$ некоторой функции $y = f(x)$ и $a \in R$.

1. График функции $y = f(x) + a$ строится параллельным переносом графика $Г$ вдоль оси $OУ$ на a единиц вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$.
2. График функции $y = f(x + a)$ строится параллельным переносом графика $Г$ вдоль оси OX на a единиц влево при $a > 0$ или вправо при $a < 0$.
3. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику $Г$ относительно оси OX.
4. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику $Г$ относительно оси $OУ$.
5. График функции $y = af(x)$ $(a > 0)$ строится растяжением графика $Г$ вдоль оси $OУ$ в a раз при $a > 1$ или сжатием в $\dfrac{1}{a}$ раз при $a < 1$.
6. График функции $y = f(ax)$ $(a > 0)$ строится сжатием графика $Г$ вдоль оси OX в a раз при $a > 1$ или растяжением в $\dfrac{1}{a}$ раз при $a < 1$.
7. График функции $y = \left|f(x)\right|$ совпадает с графиком $Г$ на тех промежутках, где $f(x) \ge 0$ и симметричен графику $Г$ относительно оси OX на тех промежутках, где $f(x) < 0$.

8. График функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком $Г$ при $x \geq 0$ и симметричен ему относительно оси $OУ$ при $x < 0$.

9. График функции $y = |f(|x|)|$ строится последовательно: сначала $y= f(|x|)$ (смотри п.8), а потом $y = |f(|x|)|$ (смотри п.7).

10. Множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству $|y| = f(x)$, строится следующим образом:

а) находится область определения относительно условия $f(x) \geq 0$;

б) на этой области определения строится график $Г$;

в) строится симметричная ему часть относительно оси OX.

11. Множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству $|y| = |f(x)|$, строится как совокупность двух графиков функций $y = |f(x)|$ и $y = -|f(x)|$.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Многие уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, можно решить *методом промежутков*, который состоит в следующем:

1. Область определения уравнения разбивают на промежутки, на которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак (т.е. разбивают на промежутки нулями подмодульных выражений);

2. На каждом найденном промежутке уравнение записывают без знака модуля и решают его на этом промежутке;

3. Объединение решений, найденных на всех промежутках, составляет множество всех решений уравнения.

Однако иногда целесообразно использовать преобразования, основанные на следующих схемах равносильных переходов:

1. Если $a > 0$, то $|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

2. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

3. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$.

4. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

5. а) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$; б) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Многие неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, можно решить *методом промежутков*. Однако иногда целесообразно использовать приведенные ниже преобразования:

1. Если $a > 0$, то $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

2. Если $a > 0$, то $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$

3. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

4. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

5. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x).$

Иррациональные уравнения

Если над иррациональным уравнением проводятся преобразования, при которых обе части уравнения возводятся в четную степень, то могут появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка полученных корней.

Методы решения иррациональных уравнений:

1) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

2) Введение вспомогательных переменных.

3) Функциональный подход.

Формулы, применяемые при решении иррациональных уравнений.

Пусть f и g – некоторые функции, $k \in N$.

1. $\sqrt[2k]{f} \cdot \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f \cdot g}, \quad f \geq 0, g \geq 0.$

2. $\dfrac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}} = \sqrt[2k]{\dfrac{f}{g}}, \quad f \geq 0, g > 0.$

3. $|f| \sqrt[2k]{g} = \sqrt[2k]{f^{2k} g}, \quad g \geq 0.$

4. $\sqrt[2k]{\dfrac{f}{g}} = \dfrac{\sqrt[2k]{|f|}}{\sqrt[2k]{|g|}}, \quad f \cdot g \geq 0; g \neq 0.$

5. $\sqrt[2k]{f \cdot g} = \sqrt[2k]{|f|} \cdot \sqrt[2k]{|g|}, \quad f \cdot g \geq 0.$

Иррациональные неравенства

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x), \end{cases} \quad n \in N.$

2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x), \quad n \in N.$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \end{cases} \quad n \in N.$

4. $$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad n \in N.$$

5. $$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g^{2n+1}(x), \quad n \in N.$$

Можно еще отметить метод вспомогательных переменных, функциональный подход, метод интервалов.

Тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a.$

Если $|a| > 1$ – решений нет.

Если $|a| <= 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \notin Z.$

2. $\cos x = a.$

Если $|a| > 1$ – решений нет.

Если $|a| <= 1$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \notin Z.$

3. $\operatorname{tg} x = a.$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z.$

4. $\operatorname{ctg} x = a.$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z.$

Некоторые приемы решения тригонометрических уравнений

1. Уравнения вида:

$$\left.\begin{array}{l} a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0, \\ a\cos^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0, \\ a\operatorname{tg}^2 f(x) + b\operatorname{tg} f(x) + c = 0, \text{ и тт.д. где } a \ne 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

являются квадратными относительно одной тригонометрической функции одного аргумента.

2. Уравнения вида:

$$a\sin^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0,$$
$$a\cos^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0 \text{ и т.д., где } a \ne 0,$$

приводятся с помощью замены $\sin^2 f(x)$ на $1 - \cos^2 f(x)$ и $\cos^2 f(x)$ на $1 - \sin^2 f(x)$ к виду (1).

3. Однородные уравнения:

а) $a\sin f(x) + b\cos f(x) = 0; \quad \cos f(x) \ne 0$ и $\sin f(x) \ne 0$

приводятся к виду $a \operatorname{tg} f(x) = -b$, $\operatorname{tg} f(x) = -\frac{b}{a}$ делением обеих частей на $\cos f(x) \neq 0$.

б) $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = 0$,

Если $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то $\cos f(x) \neq 0$ и $\sin f(x) \neq 0$, и уравнения делением обеих частей на $\cos^2 f(x) \neq 0$ приводятся к уравнению: $a\operatorname{tg}^2 f(x) + b\operatorname{tg} f(x) + c = 0$, которое является квадратным относительно $\operatorname{tg} f(x)$.

Если $a = 0$, то уравнение решается разложением левой части на множители:

$$\cos f(x)\big(b\sin f(x) + c\cos f(x)\big) = 0.$$

Если $c = 0$, уравнение решается аналогично.

4. Уравнения, содержащие тригонометрические функции различных углов.

Необходимо выразить все тригонометрические функции через функции одного и того же аргумента.

5. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$.

Обе части уравнения делением на $\sqrt{a^2+b^2}$ обеих частей уравнения приводятся к виду:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Далее вводится вспомогательный угол φ:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

получаем

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

затем находят $x + \varphi$ и выражают x, считая $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Показательные уравнения и некоторые способы их решения

Показательным называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

1. $a^{f(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x)} = a^0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0, \quad a > 0, a \neq 1.$

2. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \varphi(x), \quad a > 0, a \neq 1.$

3. Уравнения вида $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$ решаются при помощи логарифмирования обеих частей: $f(x) = \log_a b$.

4. Уравнение вида $f(a^x) = 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$ сводится к решению равносильной ему совокупности простейших показательных уравнений $a^x = t_1; a^x = t_2; \dots a^x = t_k$; где $t_1, t_2, \dots t_k$ – корни уравнения $f(t) = 0$. Так, уравнение $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

5. $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^y + C \cdot b^{2x} = 0$ решается почленным делением обеих частей уравнения на $b^{2x} \neq 0$.

Логарифмические уравнения и некоторые способы их решения

Основные методы решения.

1. Метод, основанный на определении логарифма.

$$\log_a x = b, \quad a > 0, a \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x = a^b.$$

2. Метод введения новой переменной.

Уравнение вида $p(\log_a f(x)) = 0$, где $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$ решается введением новой переменной $\log_a f(x) = y$. Уравнение сводится к совокупности уравнений $\log_a x = y_1; \log_a x = y_2; \dots \log_a x = y_n$, где y_i – корни уравнения $p(y) = 0$.

3. Метод приведения логарифмов к одному основанию.

Приведение всех логарифмов к одному основанию дает возможность дальнейшего выполнения преобразований с использованием свойств логарифмов.

4. Метод логарифмирования.

Используется для решения уравнений, в показателях которых содержатся логарифмы, а также уравнений вида $g_1(x)^{g_2(x)} = g_3(x)^{g_4(x)}$.

Логарифмирование – запись выражений под знаком логарифма. Обратное действие – потенцирование – переход от выражения, содержащего логарифмы, к выражению без них.

5. Метод потенцирования.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, a \neq 1$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

6. Уравнение вида $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Выбор системы определяется тем, какое из неравенств: $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ решается проще.

7. Уравнение вида $\log_{g(x)} f(x) = b$ равносильно системе: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g^b(x). \end{cases}$

8. Уравнение вида $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

Выбор системы зависит от того, какое из неравенств: $g(x) > 0$ или $h(x) > 0$ решается проще.

9. Уравнения вида $\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} h(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0/ \\ g(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Выбор системы определяется тем, какое из неравенств решается проще: $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$.

Показательные неравенства

Решение простейших неравенств основано на свойствах монотонности степени:

$$\text{а) } \begin{cases} a^{f(x)} > a^{h(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x), \\ a > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} a^{f(x)} > a^{h(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Методы решения показательных неравенств.

1. Приведение обеих частей неравенств к одному основанию.

2. Неравенства вида $f(a^x) \geq 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$ сводятся к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} t > 0, \\ f(t) \ge 0. \end{cases}$$

Так, с помощью этой подстановки решается неравенство

$Aa^{2x} + Ba^x + C \le 0 \quad (Aa^{2x} + Ba^x + C \ge 0) \quad A \ne 0, a > 0, a \ne 1$.

3. Неравенство вида $a^{f(x)} > b, \quad a > 0, a \ne 1, b > 0$ решается при помощи логарифмирования (так как обе части неравенства положительные). Если $b \le 0$, то неравенство справедливо для любого x из ОДЗ переменной.

Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств основано на свойствах монотонности логарифмической функции:

а) $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a h(x), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > h(x), \\ a > 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a h(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < a < 1, \\ f(x) < h(x). \end{cases}$

Имеют место следующие равносильности:

1) $\begin{cases} \log_a f(x) > 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ a > 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_a f(x) > 0, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_a f(x) < 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ a > 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_a f(x) < 0, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

5) Неравенство вида $f(\log_a x) > 0 \quad (f(\log_a x) < 0)$, где f – некоторая функция, при помощи замены $t = \log_a x$ сводится к решению неравенства $f(t) \ge 0$ с последующим решением соответствующих простейших логарифмических неравенств.

6. $\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 1. \end{cases} \end{array} \right.$

7. $$\log_{f(x)} g(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

8. $$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < h(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Правила вычисления производных

$(u + v)' = u' + v'$; $\qquad (uv)' = u'v + uv'$; $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Формулы дифференцирования

1. $(x^p)' = px^{p-1}$;
2. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
3. $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Производная сложной функции

Теорема. Если функция g имеет производную в точке x_0, функция f имеет производную в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, причем $y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Касательная к графику функции

Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Физический смысл производной

Если функция $x = f(t)$ описывает зависимость от времени координаты материальной точки, движущейся прямолинейно, то ее производная в момент времени t_0 есть мгновенная скорость в этот момент времени, т.е. $v(t_0) = f'(t_0)$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a; b]$, которая имеет на интервале $(a; b)$ конечное число критических точек, достаточно найти значения функции во всех критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$, а также на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

ТРЕУГОЛЬНИК

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне.

Свойства биссектрис треугольника:

1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в треугольник окружности.
2. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Высотой треугольника, проведенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины на прямую, которая содержит противоположную сторону.

Свойство высот треугольника: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_в} + \frac{1}{h_c}$, где h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, r – радиус вписанной в треугольник окружности.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны.

Свойства медиан треугольника: медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1, если считать от вершины.

$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$, где m_a – медиана, проведенная к стороне a.

Теорема об углах треугольника. Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

Свойство внешнего угла треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника (отрезок, который соединяет середины сторон треугольника) параллельна его третьей стороне и равна ее половине.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

<u>*Формулы площади треугольника*</u>

Если *a, b, c* – стороны; *α, β, γ* – противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c – высоты; *p* – полупериметр; *r* – радиус вписанной окружности; *R* – радиус описанной окружности, то:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad (2)$$

$$S=\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}\,,\ p=\frac{a+b+c}{2} \qquad (3)$$

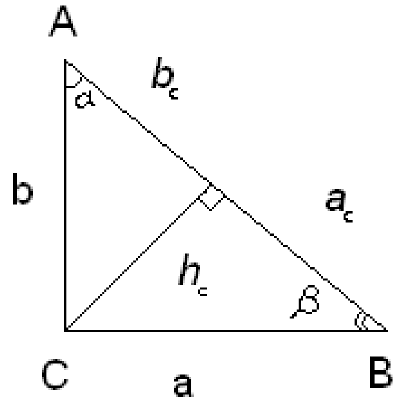
$$S=rp \qquad (4)$$

$$S=\frac{abc}{4R} \qquad (5)$$

Прямоугольный треугольник

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

1. *Теорема Пифагора.* В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $a=\sqrt{ca_c}$, где a_c – проекция катета *a* на гипотенузу, *c* – гипотенуза.
3. $a = c\sin\alpha$,
4. $b = c\cos\alpha$,
5. $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где *a, b* - катеты; *c* – гипотенуза; *α* – противолежащий угол катету *a*.



Высота, проведенная к гипотенузе:

1. $h_c=\sqrt{a_cb_c}$, где a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу;
2. $h_c=\dfrac{ab}{c}$, где *a* и *b* – катеты, *c* – гипотенуза.

ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ

C – длина окружности; R – радиус; S – площадь круга; l – длина дуги; α – величина центрального угла в радианах; β – величина центрального угла в градусах:

1) $C = 2\pi R$;

2) $l = R\alpha = \dfrac{\pi R\beta}{180°}$;

3) $S = \pi R^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $(a;b)$ и радиусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Касательная к окружности – прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, которую называют точкой касания.

Свойства касательных:

1. Касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.
2. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.

Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.

В прямоугольном треугольнике (a и b – катеты, c – гипотенуза):

1. Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$;
2. Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{c}{2}$.

Вписанный четырехугольник. Сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°.

Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

Описанный четырехугольник. Суммы противолежащих сторон описанного около окружности четырехугольника равны.

Если суммы противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равны, то в четырехугольник можно вписать окружность.

Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла. (Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги.)

1. Вписанные углы, которые опираются на одну хорду, а их вершины лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей эту хорду, равны.
2. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

3. Вписанные углы, которые опираются на одну хорду, а их вершины лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей эту хорду, дополняют друг друга до 180°.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма:

1) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;

2) в параллелограмме противолежащие стороны и противолежащие углы равны;

3) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Формулы площади параллелограмма

Если a, b – стороны; α – угол между сторонами; d_1 и d_2 – диагонали; h_a – высота, проведенная к стороне a; φ – угол между диагоналями, то:

$S = ah_a = bh_b$; $\qquad S = ab\sin\alpha$; $\qquad S = \dfrac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$.

Прямоугольник

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

1) прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма;
2) у прямоугольника диагонали равны;
3) около прямоугольника можно описать окружность с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине диагонали.

Ромб

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба:

1) ромб обладает всеми свойствами параллелограмма;
2) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов;
3) в ромб можно вписать окружность с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине высоты ромба.

Квадрат

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства квадрата:

1) квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба;

2) около квадрата можно описать окружность с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине диагонали;

3) в квадрат можно вписать окружность с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине стороны.

ТРАПЕЦИЯ

Трапеция **–** это четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Средняя линия трапеции (отрезок, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме.

Формулы площади трапеции

Если a, b – основания; h – высота; d_1 и d_2 – диагонали; φ – угол между диагоналями, то:

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h; \qquad S = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi.$$

Свойства равнобедренной трапеции (трапеция с равными боковыми сторонами):

1) углы при основаниях равны;

2) диагонали равны;

3) около равнобедренной трапеции можно описать окружность;

4) квадрат высоты равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равен произведению оснований трапеции: $h^2 = ab$;

5) площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты: $S = h^2$.

МНОГОГРАННИКИ

ПРИЗМА

1. Произвольная призма

Обозначения: l – боковое ребро; P – периметр основания; $S'_{осн}$ – площадь основания; H – высота; $P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности;
$S_{полн}$ – площадь полной поверхности; Q – площадь перпендикулярного сечения; V – объем.

1) $S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$; 3) $V = S'_{осн} \cdot H$;

2) $S_{полн} = S_{бок} + 2\,S'_{осн}$; 4) $V = Q \cdot l$.

Свойства:

- n-угольная призма имеет $n + 2$ грани, $3n$ ребра, $2n$ вершин, $n(n – 3)$ диагонали;
- основания призмы – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях;
- диагональными сечениями являются параллелограммы.

2. Прямая призма (боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.
Обозначения: P – периметр основания; l – боковое ребро.

$$S_{бок} = P \cdot l.$$

Свойства:

- все боковые грани являются прямоугольниками;
- все диагональные сечения прямой призмы являются прямоугольниками;
- высота прямой призмы равна боковому ребру.

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Параллелепипедом называется призма, основанием которой является параллелограмм.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к основаниям, называется **прямым.**

Параллелепипед называется **наклонным,** если его боковые ребра не перпендикулярны к основаниям.

Прямой параллелепипед, у которого основание является прямоугольником, называется **прямоугольным**.

Произвольный параллелепипед

Обозначения: l – боковое ребро; P – периметр основания; $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота; $P_{сеч}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковым ребрам; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

1) $S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$; 2) $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$; 3) $V = S_{осн} \cdot H$.

Свойства:

- противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;
- сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

Прямой параллелепипед

Обозначения: l – боковое ребро; P – периметр основания.

$$S_{бок} = P \cdot l.$$

Свойства:

- боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники;
- диагонали прямого параллелепипеда вычисляются по формулам:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha \text{ и } d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha,$$

где α – острый угол между смежными ребрами параллелепипеда при его основании.

Прямоугольный параллелепипед

Обозначения: a, b, c – измерения параллелепипеда; d – диагональ; P – периметр основания; H – высота; V – объем.

1) $S_{бок} = P \cdot H$; 2) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; 3) $V = abc$.

Свойства:

- все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками;
- все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Куб

Обозначения: a – ребро куба; d – диагональ; V – объем.

1) $V = a^3$; 2) $d = a\sqrt{3}$.

ПИРАМИДА

Произвольная пирамида

Обозначения: $S_{осн}$ – площадь основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; H – высота; V – объем.

1) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$; 2) $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$.

Свойства:

- если все боковые ребра пирамиды равны или наклонены под одним и тем же углом к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности;
- если все боковые грани пирамиды наклонены под одним и тем же углом к плоскости основания или высоты боковых граней равны, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности;
- если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то в сечении получится многоугольник, подобный основанию, плоскость этого сечения разбивает боковые ребра и высоту на пропорциональные отрезки, а площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины пирамиды.

Правильная пирамида

Правильная пирамида : в основании правильный n-угольник и вершина проектируется в центр этого n-угольника.

Обозначения: P – периметр основания; l – апофема (высота боковой грани); $S_{осн}$ – площадь основания; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; V -объем.

1) $S_{бок} = \frac{1}{2} Pl$; 2) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

Свойства:

- все боковые ребра равны;
- все боковые грани – равные равнобедренные треугольники;
- все двугранные углы при ребрах основания равны;
- все двугранные углы при боковых ребрах равны;
- все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.

Произвольная усеченная пирамида.

Обозначения: S_1, S'_2 – площади оснований; h – высота; V – объем.

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$

Свойства:

- боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями;
- многоугольники, являющиеся основаниями усеченной пирамиды, подобны.

Правильная усеченная пирамида

Обозначения: P_1, P_2 – периметры оснований; l – апофема; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности.

$$S_{бок} = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right)\ l.$$

Свойства:

- основаниями правильной усеченной пирамиды являются правильные многоугольники;
- боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равнобедренными трапециями.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

Обозначения: R – радиус основания; H – высота; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем.

1) $S_{бок} = 2\pi RH$; 2) $S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2$; 3) $V = \pi R^2 H$.

Свойства:

- все образующие цилиндра параллельны и равны;
- образующая цилиндра равна его высоте;
- осевым сечением цилиндра является прямоугольник, сторонами которого являются две образующие и диаметры оснований;
- сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник, две стороны которого – образующие цилиндра, а две другие – хорды основания;

- сечением цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси, является круг, равный основанию цилиндра.

КОНУС

Обозначения: R – радиус основания; H – высота; l – образующая; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; V – объем; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности.

$$1)\ S_{бок} = \pi Rl;\ 2)\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;\ 3)\ S_{полн} = \pi R\left(R + l\right).$$

Свойства:

- все образующие конуса равны между собой;
- осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основанием которого является диаметр основания, а боковыми сторонами – образующие конуса;
- сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг.

Усеченный конус

Обозначения: R, r – радиусы оснований; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности, l – образующая; H – высота; V – объем.

$$S_{бок} = \pi\left(R + r\right)\cdot l;$$

Свойства:

- все образующие усеченного конуса равны между собой;
- осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция.

СФЕРА

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии R от данной точки O.

Данная точка O называется *центром сферы*, а данное расстояние R – *радиусом сферы.*

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы.

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле: $S_{сферы} = 4\pi R^2$.

Свойства:

- всякое сечение сферы плоскостью, пересекающей ее, есть окружность;
- линия пересечения двух сфер есть окружность.

ШАР

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не превосходящем данного R, от некоторой фиксированной точки O, называемой *центром шара.*

Обозначения: R – радиус шара, r – радиус сечения, d – расстояние до секущей плоскости.

1) $V_{ш}=\frac{4}{3}\pi R^3$; 2) $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Свойства:

- всякое сечение шара плоскостью, плоскостью, пересекающей его, есть круг, центр которого – основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость;
- диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

СОДЕРЖАНИЕ